PARTIE I : Manipulations algébriques

Les savoir-faire :

- Manipulation les opérations algébriques élémentaires et maitrise du calcul littéral : Factorisation et développements.
- Factoriser un polynôme grâce à ses racines.
- Écrire un polynôme du second degré sous sa forme canonique.
- Racines carrées, valeurs absolues.
- Savoir résoudre des équations en raisonnant par équivalence
- Savoir résoudre des équations en raisonnant par analyse-synthèse.

Exercice 1 *

Factoriser dans $\mathbb{R}$ la fonction polynomiale suivante :

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

Exercice 2 *

Factoriser dans $\mathbb{R}$ la fonction polynomiale suivante :

$$f(x) = 2(x+2)^2 + 2(x+2) - 12$$

Indication : on pourra utiliser le changement de variable $X = x + 2$

Exercice 3 *

Soit n un entier naturel. Factoriser dans $\mathbb{R}$ l'expression suivante :

$$A = x^{n+2} - x^n$$

Exercice 4 *

a et b sont deux réels non nuls. Simplifier les fractions suivantes :

1. $\dfrac{\frac{a}{b} - a}{b - 1}$
2. $\dfrac{a-b}{a} - \dfrac{a-b}{b}$
3. $\dfrac{\left(1 - \frac{1}{a}\right)^2}{1 - \frac{1}{a^2}}$

Exercice 5 *

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équation suivantes :

1. $x^3 + 2x = 3x^2$
2. $(2x+1)\left(x^2 - 2x + 2\right) = 2x + 1$
3. $\dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$

Indication : penser à se ramener à une équation produit ou quotient

Exercice 6 *

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^4 + 1 = 2x^2$
2. $6x^4 - x^2 - 1 = 0$
3. $x^4 + x^2 = 2$

Exercice 7 *

Écrire sous forme d'une fraction :

1. $A(x) = \dfrac{1-3x}{(2+x)^2} - \dfrac{1-2x}{2+x}$
2. $B(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2} + \dfrac{x}{1+x}$
3. $C(x) = \dfrac{2+x}{\sqrt{x}} - \dfrac{2\sqrt{x} + x}{x}$

Exercice 8 **

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$x - 4 = \sqrt{2x - 5}$$

Indication : Attention, élever au carré n'est pas une opération réversible ! On a $x = y \Longrightarrow x^2 = y^2$ mais $x^2 = y^2 \not\Longrightarrow x = y$

Exercice 9 *

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équation suivantes :

1. $x = \sqrt{x}$
2. $x = \sqrt{x^2}$
3. $x = \sqrt{-x}$
4. $x = \left(\sqrt{x}\right)^2$

Exercice 10 *

Déterminer l'unique fonction polynomiale du second degré f vérifiant :

$$f(0) = 2 \quad f(1) = -1 \quad f(-1) = 9$$

PARTIE II : Suites numériques et récurrence

Les savoir-faire :

- Reconnaitre une suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique. Donner leur terme général et connaitre la somme des termes d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique.
- Convergence de suites. Calcul de limites de suites géométriques en fonction de la raison.
- Théorèmes de comparaison, théorème des gendarmes

Nouveauté pour les étudiants n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité :

- Suites croissante majorée / décroissante minorée
- Raisonnement par récurrence

Exercice 11 *

Soit (u_n) une suite géométrique telle que :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_5 = 96$$

Déterminer la raison q de cette suite et déterminer la somme S suivante :

$$S = u_3 + u_4 + ... + u_{11}$$

Exercice 12 *

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 5u_n + 4 \\ u_0 &= 2 \\ v_n &= u_n + 1 \end{cases}$$

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 13 *

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $7^n - 1$ est divisible par 6

Exercice 14 *

On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq n^2$
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 15 *

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1} \quad ; \quad v_n = \frac{1}{u_n}$$

et par $u_0 = 1$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier n, u_n est bien défini et $u_n > 0$.
2. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Sa raison ?
3. Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 16 *

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + v_n \end{cases}$$

1. Soient (a_n) et (b_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :

   $$a_n = v_n + u_n \quad ; \quad b_n = v_n - u_n$$

   Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont géométriques. Préciser leur premier terme et leur raison.
2. Exprimer a_n et b_n en fonction de n.
3. Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 17 *

Soit $x > 0$ un réel. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Exercice 18 **

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = \frac{1 + 2u_n}{2 + u_n} \quad ; \quad u_0 = 0$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a $0 < u_n < 1$

Indication : étudier la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1+2x}{2+x}$ *sur l'intervalle* $[0;1]$

Exercice 19 **

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= -1 \\ u_{n+2} &= 4u_{n+1} - 4u_n \\ v_n &= u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
   Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

   $$w_n = \frac{u_n}{2^n}$$

3. Montrer que (w_n) est une suite arithmétique. On précisera sa raison et son premier terme.
4. Exprimer w_n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 20 *

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = a \quad ; \quad u_{n+1} = (u_n)^2$$

1. Montrer que si $a > 1$ alors (u_n) est une suite strictement croissante. Est-elle convergente ?
2. Montrer que si $0 < a < 1$, la suite (u_n) est une suite strictement décroissante. Est-elle convergente ?

PARTIE III : le symbole somme $\sum$

....

Rappel : le symbole $\sum$ est utilisé pour écrire une somme de plusieurs termes qui s'écrivent en fonction d'un paramètre.
Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels, alors $\sum_{k=1}^{n} x_k$ se lit « somme pour k allant de 1 à n de x_k »et est défini par

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n$$

Voici quelques autres exemples :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{213}{60}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$
(formule vue en classe de 1ère)

Exercice 21 *

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{n-k}$

Exercice 22 *

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1$

Exercice 23 *

Montrer par récurrence que l'égalité suivante est vraie pour tout entier n :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 24 *

Soit $q \neq 1$ un réel fixé. Montrer par récurrence que l'égalité suivante est vraie pour tout entier n :

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exercice 25 *

Montrer par récurrence que l'égalité suivante est vraie pour tout entier n :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 26 *

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

1. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$ où a et b sont deux réels à déterminer.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 27 **

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3
2. Montrer par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$

Exercice 28 **

Soit $a > 0$. On pose $u_n(a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-ka}$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $u_n(a)$ en fonction de a et n
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n(a) = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^a - 1}$

PARTIE IV : Inégalités

Les savoir-faire :

- Résoudre des inéquations du premier ou second degré, ainsi que des inéquations produit et quotient.
- Opérations sur les inégalités (produit, somme, inverse) avec **rigueur**. En particulier :
  - Le passage à l'inverse change le sens de l'inéquation quand les deux membres sont **strictement du même signe**.
  - Multiplier ou diviser par un nombre strictement positif ne change pas le sens de l'inégalité, multiplier ou diviser par un nombre strictement négatif change le sens de l'inégalité.
- Distinguer les opérations sur les inégalités qui préservent l'équivalence ou celles qui ne donnent qu'une implication (par exemple la mise au carré, ne donne qu'une implication, le passage à l'exponentielle donne une équivalence).
- Définition de la croissance et de la décroissance via une inégalité.
- Résoudre une inégalité par l'étude d'une fonction, notamment par une étude de variations et l'étude des extrema.
- Faire le lien entre la convexité ou concavité d'une fonction sur un intervalle et le rapport aux tangentes.
- Faire la différence entre une inégalité large ou stricte.
- Maitriser les écritures sous forme d'union ou d'intersection d'intervalle pour les ensembles de solution.

Exercice 29 *

Montrer que pour tout réel $x > 1$ on a :

$$\frac{1-x}{\sqrt{x}-1} < 0$$

Exercice 30 *

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $2x+5 < 3x-4$
2. $x-1 \leq x+1$
3. $(x+1)(2x+1) \geq (x+1)(x-1)$
4. $\dfrac{x+1}{2x-4} \geq 0$

Exercice 31 *

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $4x^2-8x+4 \geq 0$
2. $x^3+x^2 \geq -x-1$
3. $(x+1)^2 < (x-1)^2$
4. $\sqrt{x-1} < \sqrt{x+1}$
5. $\sqrt{(2x+1)^2} < \sqrt{(3-x)^2}$

Exercice 32 *

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{x+4}{x-1} < \dfrac{2x+1}{x-1}$
2. $\dfrac{x-2}{x+4} < \dfrac{x+1}{x-1}$
3. $\dfrac{1}{x} \geq -2$

Exercice 33 *

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $0 \leq \dfrac{x^2}{x^2-1} \leq 1$
2. $0 \leq \dfrac{x}{x+1} \leq 2$
3. $\dfrac{x^3-1}{x+1} \leq x^2-x-1$
4. $\dfrac{x-1}{x-1} \leq 1$

Exercice 34 *

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $|4-x| \leq 1$
2. $\sqrt{(x-2)^2} \geq 1$
3. $|x-3|+|x+4| \leq 1$

Exercice 35 *

Montrer que de tous les rectangles qui partagent le même périmètre, celui ayant la plus grande aire est le carré.

Exercice 36 **

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$e^x+1 \leq e^{-x}$$

Exercice 37 **

Montrer que pour tout réel x on a :

$$x\ln(x) > -\frac{1}{e}$$

PARTIE V : Étude de fonctions

Les savoir-faire :

- Savoir déterminer les domaines de définition, continuité et dérivabilité des fonctions usuelles (puissances, inverses, logarithmes, exponentielles, racines, valeurs absolues) et de compositions de fonctions.
- Savoir dériver une somme, un produit, un quotient, une composée de deux fonctions.
- Connaitre les définitions de fonction paire, impaire, périodique, croissante, décroissante, convexe et concave.
- Déterminer une primitive d'une fonction usuelle. calculer une intégrale d'une fonction usuelle.
- Connaitre le lien entre intégrale et aire sous la courbe. Théorème fondamental de l'analyse et lien avec les primitives.
- Théorème des valeurs intermédiaires, corollaire du théorème des valeurs intermédiaire. Rédaction associée.
- Tracer la courbe représentative de toutes les fonctions usuelles. Tracer l'allure de la courbe représentative d'une fonction à l'aide de points.
- Dresser le tableau de signe et de variations d'une fonction usuelle. Déterminer les extrema d'une fonction.

Nouveauté pour les étudiants n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

- Composition de fonctions
- Fonctions trigonométriques cosinus, sinus et tangente.

Dans la suite des exercices, on entendra par « **Faire l'étude de la fonction f** » l'ensemble des choses suivantes :

- Déterminer le domaine de définition de f
- Étudier la continuité et la dérivabilité de f
- Dériver f, étudier le signe de la fonction dérivée, dresser le tableau de variations de la fonction, déterminer ses extrema.
- On pourra aussi étudier le signe de f et les limites aux bornes de l'ensemble de définition si elles existent.

Exercice 38 *

On considère la fonction f suivante :

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

Faire l'étude de la fonction f.

Exercice 39 *

On considère la fonction f suivante :

$$f(x) = 4x^3 - 3x - 1$$

Faire l'étude de la fonction f.

Exercice 40 *

On considère la fonction f suivante :

$$f(x) = (x+1)e^{2x}$$

Faire l'étude de la fonction f.

Exercice 41 *

On considère la fonction f suivante :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$$

Faire l'étude de la fonction f.

Exercice 42 *

On considère la fonction f suivante :

$$f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}}$$

Exercice 43 *

On considère la fonction f suivante :

$$f(x) = \ln(2x+1)$$

Faire l'étude de la fonction f.

Exercice 44 *

On considère la fonction f suivante :

$$f(x) = \frac{x-4}{2x+1}$$

1. Faire l'étude de la fonction f.
2. Déterminer les asymptotes droites de la fonction f

Exercice 45 **

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Étudier la limite de $f(x)$ en 1 en utilisant un nombre dérivé.

Indice : On pourra considérer le taux d'accroissement de la fonction g définie pour $x \geq -3$ par $g(x) = \sqrt{x+3}$ en 1.

Exercice 46 *

Dans chaque cas, étudier le domaine de définition et de dérivabilité de la fonction f, puis calculer une expression de sa dérivée f' sur cet intervalle.

1. $f(x) = \left(\dfrac{2x+1}{4-x}\right)^5$

2. $f(x) = (x-2)\sqrt{x}$

3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+2}$

4. $f(x) = x^n \ln(x)$ pour n un entier naturel non nul.

Exercice 47 **

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sin(x)\cos(x)^4$
2. $f_3(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x)^3}$
3. $f_2(x) = xe^{-x^2}$
4. $f_4(x) = 3^x$

Exercice 48 *

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 (3t^2+2t-1)\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^4 \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 (2t+2)^2\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1+2t+t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^{\dfrac{\pi}{2}} 4\cos(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 49 *

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^\pi \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 t(3t^2+1)^4\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^1 e^{2t}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan(t)\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{3t^2+1}{(t^3+t)^4}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 50 **

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2+t+1}{t+1}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t)-\sin(t))e^{-t}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t+e^{-t}}{2}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{1-\cos(t)^2}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{3t^2+1}{(t^3+t)^4}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(t)^2-\sin(t)^2)\,\mathrm{d}t$

PARTIE VI : Probabilités et dénombrement

Les savoir-faire :

- Connaitre la définition d'un évènement, d'une probabilité, d'une probabilité conditionnelle.
- Connaitre la différence entre indépendant et incompatible. Ne pas confondre les deux.
- Faire la différence entre un évènement et la probabilité de cet évènement.
- Écrire un évènement à l'aide d'intersections, d'unions ou de la négation d'autres évènements.
- Maitriser les schémas de Bernoulli
- Connaitre la définition d'une variable aléatoire, de la loi d'une variable aléatoire
- Connaitre la définition d'un schéma de Bernoulli, d'une loi binomiale
- Connaitre la définition d'espérance, variance et écart-type.
- Savoir exprimer un évènement sous la forme d'une égalité ou d'une inégalité avec une variable aléatoire ($P(X=2)$ ou $P(X<5)$ par exemple, notamment dans le cadre d'une loi binomiale).
- Savoir utiliser les formules de dénombrement : principe additif, principe multiplicatif, k-uplets, arrangements et combinaisons.

Exercice 51 *

Un joueur lance des fléchettes dans une cible. La fléchette touche la cible dans 81% des cas. Combien le joueur doit-il tirer de fléchette pour être sûr à au moins $99,99\%$ qu'au moins une de ses fléchettes touche la cible ?

Exercice 52 *

On lance trois dés équilibrés à 6 faces. Quelle est la probabilité que la somme des trois chiffres obtenus soit 6 ?

Exercice 53 *

Michel a un chien qu'il a appelé Snoopy. Tous les jours, quand Michel rentre chez lui, il trouve Snoopy en train de dormir dans 20% des cas, en train de manger dans 35% des cas et en train de jouer dans 45% des cas. On note X le nombre de fois où Michel retrouve Snoopy en train de dormir en rentrant chez lui sur une durée de sept jours.

1. Quelle est la loi suivie par X ?
2. Quelle est la probabilité que Michel trouve Snoopy en train de dormir exactement trois fois sur ces sept jours ?
3. Quelle est la probabilité que Michel trouve Snoopy en train de dormir au moins deux fois sur ces sept jours ?
4. En moyenne, combien de fois Michel trouve-t-il Snoopy en train de dormir en rentrant chez lui au cours d'une année ?

Exercice 54 *

Une urne contient 20% de billes bleues, 30% de billes vertes et 50% de billes rouges. Seules 10% des billes vertes portent une étoile, contre 15% des billes bleues et 20% des billes rouges.

On tire dans l'urne une bille. Elle est étoilée. Quelle est la probabilité que cette bille soit rouge ?

Exercice 55 *

Une urne contient 150 jetons, dont 70 rouges et 80 bleus.
Parmi les jetons rouges, 40 sont carrés et 30 sont triangulaires
Parmi les jetons bleus, 50 sont carrés et 30 sont triangulaires.
On tire un jeton au hasard dans l'urne. On note A l'événement « le jeton tiré est rouge » et B l'événement « le jeton tiré est bleu ».
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 56 *

1. Combien existe-il de mot de passe contenant 5 lettres majuscules ou minuscules suivies de 4 chiffres ?
2. Pour jouer au loto, il faut cocher 6 numéros : 5 sur une grille de 49 numéros et 1 numéro chance sur une grille de 10 numéros.

   Pour remporter le jackpot, il faut que tous les numéros correspondent au tirage. Quelle est la probabilité de gagner le jackpot ?
3. Combien y a-t-il de façons différentes de mélanger un jeu de 32 cartes ?
4. Gérard a 12 livres dans son étagère : 5 romans classiques, 4 livres de science fiction, et 3 livres de cuisine.

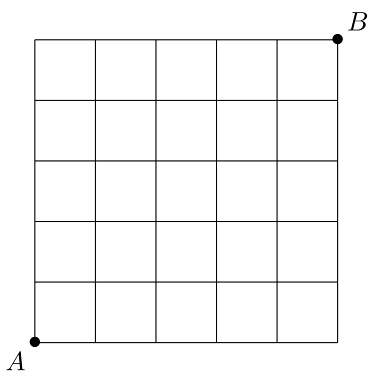
   De combien de façon différentes Gérard peut-il ranger ses livres sans mélanger les genres ?

Exercice 57 *

Combien un élève de seconde peut-il choisir de triplettes de 3 spécialités parmi les 10 spécialités proposées dans son établissement ?

Exercice 58 *

On parcourt la figure suivante en partant du point A et en allant jusqu'au point B, en avançant sur les arêtes soit vers le haut (H) soit vers la droite (D).



De combien de façons différentes peut-on faire ce parcours ?

Exercice 59 *

On lance un dé à 6 faces 5 fois de suites.

1. Calculer la probabilité d'obtenir des numéros dans l'ordre strictement croissant.
2. Calculer la probabilit d'obtenir des numéros dans l'ordre croissant.

Exercice 60 *

Soit $n \geq 1$ un entier. On lance n fois un dé parfaitement équilibré à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir

1. au moins une fois le chiffre 6 ?
2. au moins deux fois le chiffre 6 ?
3. au moins k fois le chiffre 6 avec $1 \leq k \leq n$?

Exercice 61 *

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n.
Soit k un entier avec $1 \leq k \leq n$. On pioche k jetons successivement et sans remise dans l'urne. Calculer la probabilité de tirer k numéros dans l'ordre décroissant.

PARTIE VII : Nombres complexes

Les savoir-faire

- Nombre imaginaire i, nombre complexee, partie réelle, partie imaginaire, forme algébrique.
- Somme, produit, quotient de deux nombres complexes, conjugué d'un nombre complexe.
- Équation du second degré à solutions complexes.
- Représentation d'un nombre complexe dans le plan, coordonnées cartesiennes, affixe. Lien avec les vecteurs.
- Représentation d'un nombre complexe dans le plan par un angle et une distance, coordonnées polaires, module et argument, forme trigonométrique, forme exponentielle.
- Trigonométrie : Fonction sinus et fonction cosinus, formules des sommes en trigonométrie. Formules d'Euler.

Les nombres complexes ne sont abordés que dans l'option maths experte. Vous trouverez en complément de cette feuille d'exercice un cours complet sur les nombres complexes qui vous donnera les bases nécessaire sur ce chapitre. Il est important de se familiariser avec ces notions avant de les aborder dans le cours d'hypokhâgne.

Exercice 62 *

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (3+i)(13-2i)$
2. $z_4 = 4 + 2i(3i+2)$
3. $z_2 = (1-i)^2$
4. $z_5 = \dfrac{2+i}{i-3}$
5. $z_3 = (3+i)(2+i)(i-1)$
6. $z_6 = \dfrac{(4-i)(5-i)}{(2i+1)(3-i)}$

Exercice 63 *

Donner la forme algébrique du conjugué des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (3+2i)(-4+2i)$
2. $z_3 = \dfrac{2-3i}{8+5i}$
3. $z_2 = (2+i)^3$
4. $z_4 = \dfrac{2}{i+1} + \dfrac{1}{1-2i}$

Exercice 64 *

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $3z^2 + 12z + 12 = 0$
2. $z^2 + z + 1 = 0$
3. $2z^2 - 6z + 7 = 0$
4. $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$

Exercice 65 *

Soit b un nombre réel.

1. Développer $(z^2 - bz + 4)(z^2 + bz + 4)$.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 + 16 = 0$ dans $\mathbb{C}$

Exercice 66 *

Soit z un nombre complexe différent de 1.
On pose $h = \dfrac{z+2i}{z-1}$ un nombre complexe.

1. Determiner l'ensemble R des points d'affixe z tel que h soit un nombre réel.
2. Determiner l'ensemble I des points d'affixe z tel que h soit un nombre imaginaire pur.

Exercice 67 *

Pour tout nombre complexe z on pose $P(z) = z^4 - 1$.

1. Factoriser $P(z)$ et en déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 = 1$.
2. En déduire les solutions de l'équation $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$

Exercice 68 *

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $25 + 10z + z^2 = 16i$.

Exercice 69 *

Donner la forme trigonométrique, puis la forme exponentielle, des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + i$
2. $z_3 = 2 - \sqrt{12}i$
3. $z_2 = 3 - 3i$
4. $z_4 = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$

Exercice 70 *

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation **(E)** : $z^3 - (1-i)z^2 + (1-i)z + i = 0$

1. Montrer que **(E)** possède une unique solution imaginaire pure.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation **(E)**.

Exercice 71 *

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes dont on donne la forme algrébrique :

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i \quad ; \quad z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

Soit z_3 le nombre complexe défini par : $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Donner la forme algébrique du nombre complexe z_3.
2. Donner la forme exponentielle du nombre complexe z_1.
3. Donner la forme exponentielle du nombre complexe z_2.
4. En déduire la forme exponentielle du nombre complexe z_3.
5. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.